# Le beurre et le Tarjan du beurre

# (Union-Find Persistant)

Sylvain Conchon et Jean-Christophe Filliâtre

Université Paris Sud / CNRS

JFLA 2007

# Le problème des classes disjointes

maintenir dans une structure de données une partition de $\{0, 1, \ldots, n-1\}$

structure impérative :

```
module type ImperativeUnionFind = sig
  type t
  val create : int → t
  val find : t → int → int
  val union : t → int → int → unit
end
```

# Le problème des classes disjointes

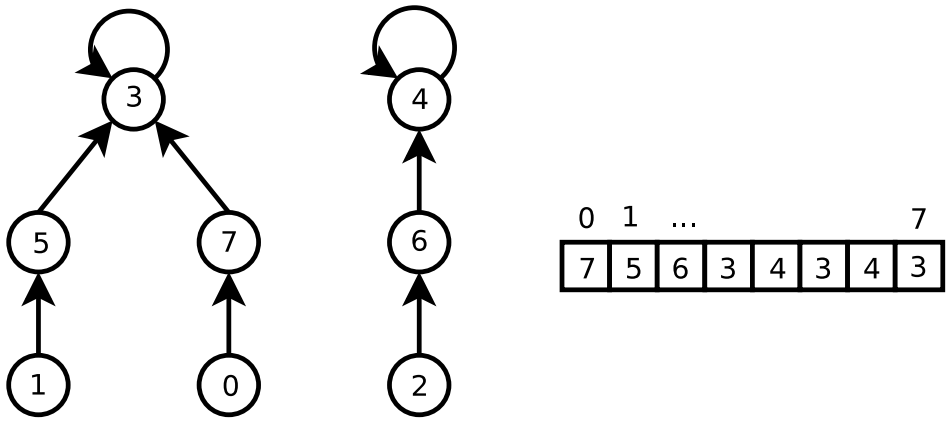
maintenir dans une structure de données une partition de $\{0, 1, \ldots, n-1\}$

structure impérative :

```
module type ImperativeUnionFind = sig
  type t
  val create : int → t
  val find : t → int → int
  val union : t → int → int → unit
end
```

# Solution optimale : l'algorithme de Tarjan

(solution en réalité due à M. D. McIllroy et R. Morris, et seulement analysée par Tarjan)
dans chaque classe, les éléments sont chaînés jusqu'au représentant




deux idées clés :

- la **compression de chemin** pendant l'opération `find`
- l'utilisation de **niveaux** pendant l'opération `union`

# Union-Find persistant

la solution de Tarjan est inadaptée au **backtracking**

- pas d'opération `undo` immédiate
- la copie de la structure serait catastrophique

une solution serait une structure **persistante** :

```
module type PersistentUnionFind = sig
  type t
  val create : int → t
  val find : t → int → int
  val union : t → int → int → t
end
```

# Union-Find persistant

la solution de Tarjan est inadaptée au **backtracking**

- pas d'opération undo immédiate
- la copie de la structure serait catastrophique

une solution serait une structure **persistante** :

```
module type PersistentUnionFind = sig
  type t
  val create : int → t
  val find : t → int → int
  val union : t → int → int → t
end
```

# Une solution naïve

```
module M = Map.Make(struct type t = int let compare = compare end)

type t = int M.t

let create n = M.empty

let find m i =
  let rec lookup i = try lookup (M.find i m) with Not_found → i in
  lookup i

let union m i j =
  let ri = find m i in
  let rj = find m j in
  if ri <> rj then M.add ri rj m else m
```

# Notre solution

nous proposons une solution

- de **même efficacité** que l'algorithme de Tarjan
- **persistante** (mais utilisant des effets de bord)
- formellement **prouvée**

obtenue en combinant

- une structure de données de **tableaux persistants**
- une version persistante de l'algorithme de Tarjan

# Notre solution

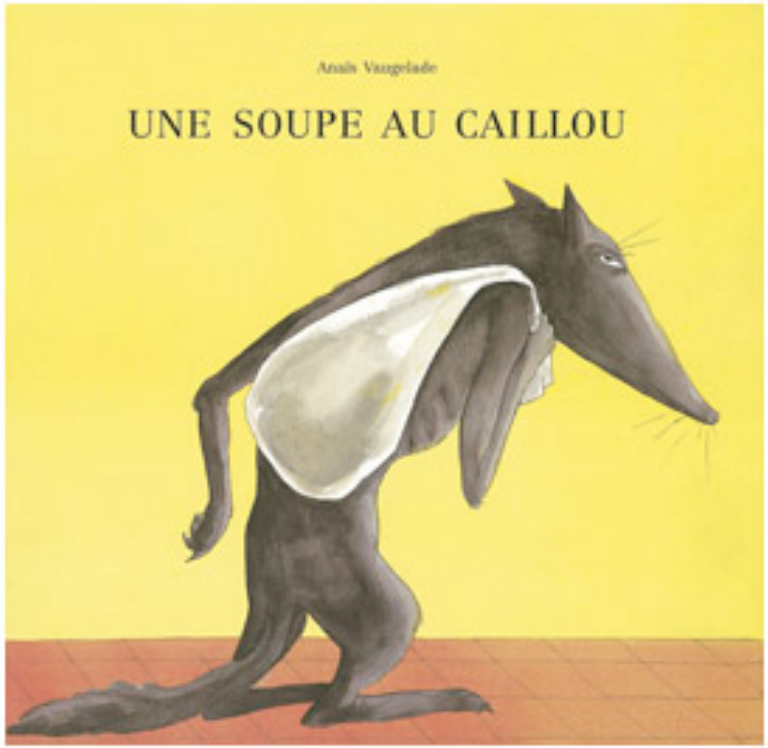
nous proposons une solution

- de **même efficacité** que l'algorithme de Tarjan
- **persistante** (mais utilisant des effets de bord)
- formellement **prouvée**

obtenue en combinant

- une structure de données de **tableaux persistants**
- une version persistante de l'algorithme de Tarjan

# Notre solution



# Une version persistante de l'algorithme de Tarjan

pour rester indépendant de la structure de tableaux persistants :

```
module Make(A : PersistentArray) : PersistentUnionFind
```

en supposant

```
module type PersistentArray = sig
  type α t
  val init : int → (int → α) → α t
  val get : α t → int → α
  val set : α t → int → α → α t
end
```

# Une version persistante de l'algorithme de Tarjan

on conserve les deux tableaux de l'algorithme de Tarjan

```
type t = { rank : int A.t ; mutable father : int A.t }
```

le champ `mutable` permet de conserver la compression de chemins

# Une version persistante de l'algorithme de Tarjan

la recherche du représentant avec compression de chemin :

```
let rec find_aux f i =
  let fi = A.get f i in
  if fi == i then
    f, i
  else
    let f, r = find_aux f fi in
    let f = A.set f i r in
    f, r
```

l'enregistrement de la compression de chemin :

```
let find h x =
  let f,rx = find_aux h.father x in h.father ← f ; rx
```

# Une version persistante de l'algorithme de Tarjan

la recherche du représentant avec compression de chemin :

```
let rec find_aux f i =
  let fi = A.get f i in
  if fi == i then
    f, i
  else
    let f, r = find_aux f fi in
    let f = A.set f i r in
    f, r
```

l'enregistrement de la compression de chemin :

```
let find h x =
  let f,rx = find_aux h.father x in h.father ← f ; rx
```

# Tableaux persistants

pour garder l'efficacité de Tarjan, il faut des tableaux persistants efficaces

solution connue depuis 1978 et due à **Henry Baker**

idée : un tableau persistant est

- soit un vrai tableau
- soit une indirection vers un tableau persistant

```
type α t = α data ref
and  α data =
   | Arr of α array
   | Diff of int × α × α t
```

# Tableaux persistants

pour garder l'efficacité de Tarjan, il faut des tableaux persistants efficaces

solution connue depuis 1978 et due à **Henry Baker**

idée : un tableau persistant est

- soit un vrai tableau
- soit une indirection vers un tableau persistant

```
type α t = α data ref
and  α data =
  | Arr of α array
  | Diff of int × α × α t
```

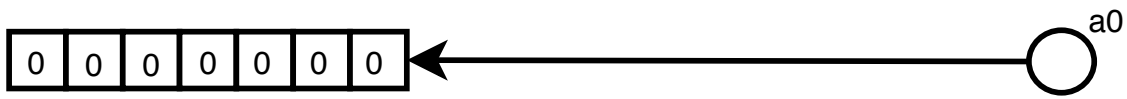
# Tableaux persistants de Baker

```
let a0 = create 7 0

let a1 = set a0 1 7

let a2 = set a1 2 8

let a3 = set a1 2 9
```



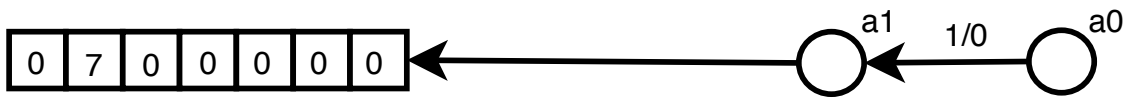
# Tableaux persistants de Baker

```
let a0 = create 7 0

let a1 = set a0 1 7

let a2 = set a1 2 8

let a3 = set a1 2 9
```



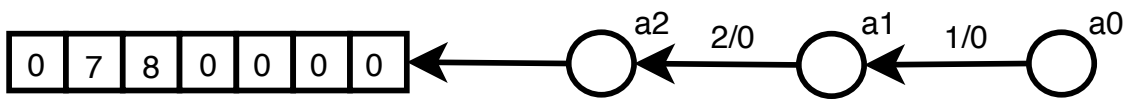
# Tableaux persistants de Baker

```
let a0 = create 7 0

let a1 = set a0 1 7

let a2 = set a1 2 8

let a3 = set a1 2 9
```



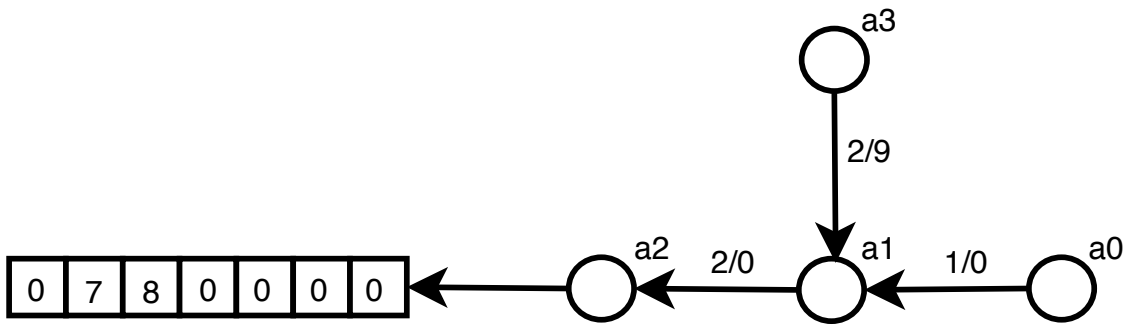
# Tableaux persistants de Baker

```
let a0 = create 7 0

let a1 = set a0 1 7

let a2 = set a1 2 8

let a3 = set a1 2 9
```



# Tableaux persistants de Baker

ces tableaux sont persistants mais inefficaces dès qu'on accède à une version antérieure

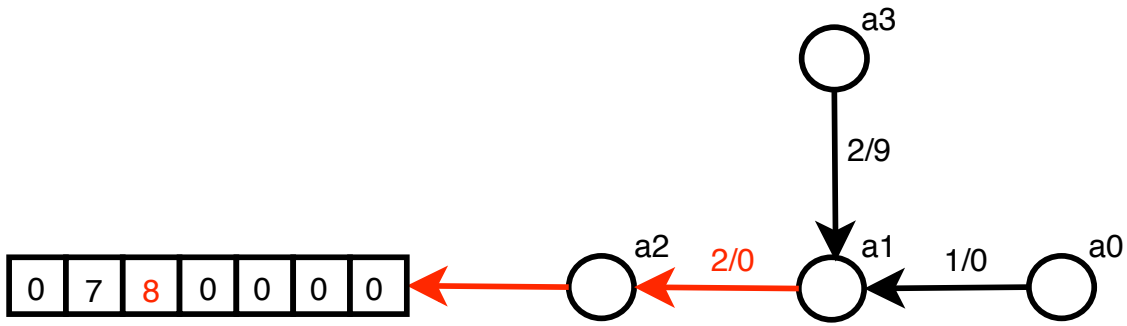
pour améliorer les performances, Baker introduit le **rerooting**

# Tableaux persistants de Baker

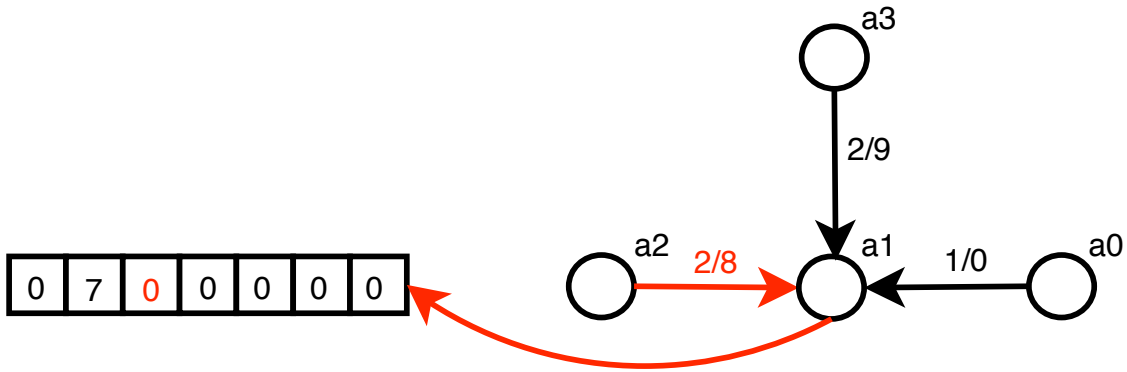
ces tableaux sont persistants mais inefficaces dès qu'on accède à une version antérieure

pour améliorer les performances, Baker introduit le **rerooting**

# Rerooting




si on accède maintenant à a1, on commence par un reroot



# Amélioration

dans un cas de **backtracking** où on revient toujours à des versions antérieures, on peut se dispenser du renversement de la chaîne de pointeurs


retour au tableau a1

# Au final...

- les tableaux obtenus ne sont plus totalement persistants $\Rightarrow$ ils sont seulement **semi-persistants**

- la solution obtenue est comparable à une « pile de *undo*s », mais celle-ci est cachée dans la structure de données

# Au final...

- les tableaux obtenus ne sont plus totalement persistants $\Rightarrow$ ils sont seulement **semi-persistants**

- la solution obtenue est comparable à une « pile de *undo*s », mais celle-ci est cachée dans la structure de données

# Performances

tests inspirés d'une utilisation dans une procédure de décision
$p$ = ratio `union` / `find`
$N$ = nombre d'opérations entre deux points de backtrack

| $p$<br>$N$ | 5%<br>$2.10^4$ | 5%<br>$10^5$ | 5%<br>$5.10^5$ | 10%<br>$2.10^4$ | 10%<br>$10^5$ | 10%<br>$5.10^5$ | 15%<br>$2.10^4$ | 15%<br>$10^5$ | 15%<br>$5.10^5$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Tarjan | 0.31 | 2.23 | 12.50 | 0.33 | 2.34 | 12.90 | 0.34 | 2.36 | 13.20 |
| V1 | 0.52 | 3.03 | 17.10 | 0.81 | 4.78 | 26.80 | 1.16 | 6.78 | 37.90 |
| V2 | 0.34 | 2.01 | 11.70 | 0.42 | 2.54 | 14.90 | 0.52 | 3.21 | 18.70 |
| **V3** | **0.33** | **1.90** | **11.30** | **0.41** | **2.45** | **14.40** | **0.52** | **3.14** | **17.80** |
| naïve | 0.76 | 5.28 | 37.50 | 1.22 | 9.14 | 63.80 | 40.40 | $>$10mn | $>$10mn |

- V1 = tableaux persistants de Baker
- V2 = tableaux semi-persistants
- V3 = V2 défonctorisée

# Preuve formelle

structure persistante mais nombreux **effets de bord** $\Rightarrow$ correction non immédiate $\Rightarrow$ preuve formelle menée avec l'aide de Coq

modèle-mémoire associant un type abstrait `pointer` à des valeurs

```
Inductive data : Set :=
  | Arr : data
  | Diff  : Z → Z → pointer → data.

Record mem : Set := { ref : PM.t data; arr : Z→Z }.
```

# Preuve formelle

structure persistante mais nombreux **effets de bord** $\Rightarrow$ correction non immédiate $\Rightarrow$ preuve formelle menée avec l'aide de Coq

modèle-mémoire associant un type abstrait `pointer` à des valeurs

```
Inductive data : Set :=
  | Arr : data
  | Diff  : Z → Z → pointer → data.

Record mem : Set := { ref : PM.t data; arr : Z→Z }.
```

# Modélisation de la persistance

`pa_valid` $m$ $p$ = $p$ tableau persistant bien formé dans la mémoire $m$
`pa_model` $m$ $p$ $f$ = le contenu de $p$ est modélisé par la fonction $f$

```
Definition set :
  ∀m :mem, ∀p :pointer, ∀i v :Z,
  pa_valid m p →
  { p' :pointer & { m' :mem |
    ∀f, pa_model m p f →
      pa_model m' p f ∧ pa_model m' p' (upd f i v) } }.
```

# Modélisation de la persistance

`pa_valid` $m$ $p$ = $p$ tableau persistant bien formé dans la mémoire $m$
`pa_model` $m$ $p$ $f$ = le contenu de $p$ est modélisé par la fonction $f$

```
Definition set :
  ∀m :mem, ∀p :pointer, ∀i v :Z,
  pa_valid m p →
  { p' :pointer & { m' :mem |
    ∀f, pa_model m p f →
       pa_model m' p f ∧ pa_model m' p' (upd f i v) } }.
```

# Conclusion

une structure union-find persistante aux performances comparables à celles de l'algorithme de Tarjan

- exemple significatif de structure persistante mais non purement applicative
- exemple de preuve de programme ML impératif dans Coq
- introduit la notion de semi-persistance $\Rightarrow$ peut-on en vérifier l'utilisation licite par typage ?