Arithmétique réelle exacte certifiée, co-induction et base arbitraire

Nicolas Julien

INRIA Sophia-Antipolis, projet Marelle

JFLA 2007

Plan

Utilisation usuelle des réels

Nombres flottants (norme IEEE 754)

- Calculs efficaces
- Représentation compacte

Utilisation usuelle des réels

Nombres flottants (norme IEEE 754)

- Calculs efficaces
- Représentation compacte

Mais

- En fait un sous-ensemble fini de $\mathbb{Q}$
- Problèmes d'arrondis
- Pertes de propriétés sur les réels

Motivations

Arithmétique réelle exacte

- Calcul à précision arbitraire

Preuve formelle

- Garantir l'exactitude des calculs
- Calculer et raisonner sur nos nombres

Base arbitraire

- Généraliser la bibliothèque en base 2 de Bertot
- Utiliser les entiers machines

Représentation des réels

- Un réel r de $[-1, 1]$ en base β
- Une séquence infinie s de chiffres signés de la base β

Représentation des réels

- Un réel r de $[-1, 1]$ en base β
- Une séquence infinie s de chiffres signés de la base β
- $$[s]_\beta = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{d_i}{\beta^i}$$
- avec $-\beta < d_i < \beta$

Représentation des réels

- Un réel r de $[-1, 1]$ en base β
- Une séquence infinie s de chiffres signés de la base β
- $$[s]_\beta = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{d_i}{\beta^i}$$
- avec $-\beta < d_i < \beta$
- En base 10, $\frac{1}{3}$: $33333333\ldots$

Représentation des réels

- Un réel r de $[-1,1]$ en base β
- Une séquence infinie s de chiffres signés de la base β
- $$[s]_\beta = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{d_i}{\beta^i}$$
- avec $-\beta < d_i < \beta$
- En base 10, $\frac{1}{3}$: $33333333\ldots$
- On note que $[d1 :: s]_\beta = \frac{d1+[s]_\beta}{\beta}$

Représentation des réels

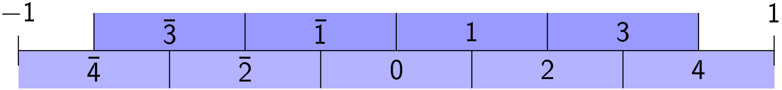
- Un réel r de $[-1,1]$ en base β
- Une séquence infinie s de chiffres signés de la base β
- $$[s]_\beta = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{d_i}{\beta^i}$$
- avec $-\beta < d_i < \beta$
- En base 10, $\frac{1}{3}$: $33333333\ldots$
- On note que $[d1 :: s]_\beta = \frac{d1+[s]_\beta}{\beta}$
- On ajoute un exposant pour représenter l'ensemble des réels
- $[(s,e)]_\beta = \beta^e [s]_\beta$

Pourquoi cette représentation

- Relativement proche des ordinateurs
- Ne nécessite pas beaucoup de théories mathématiques

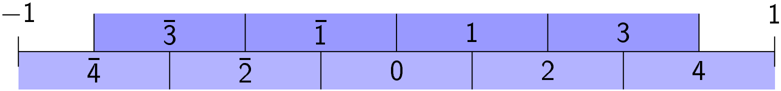
Pourquoi cette représentation

- Relativement proche des ordinateurs
- Ne nécessite pas beaucoup de théories mathématiques
- Représentation redondante



Pourquoi cette représentation

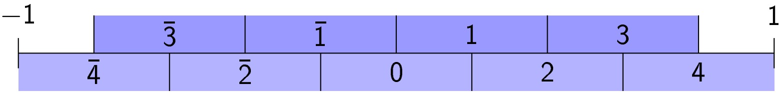
- Relativement proche des ordinateurs
- Ne nécessite pas beaucoup de théories mathématiques
- Représentation redondante



- Connaître un encadrement de taille $\frac{1}{\beta}$ $\Rightarrow$ connaître un premier chiffre possible
- Production de chiffres 1 à 1

Pourquoi cette représentation

- Relativement proche des ordinateurs
- Ne nécessite pas beaucoup de théories mathématiques
- Représentation redondante



- Connaître un encadrement de taille $\frac{1}{\beta} \Rightarrow$ connaître un premier chiffre possible
- Production de chiffres 1 à 1
- Mais comparaison pas décidable

Calcul de l'addition

- Image de l'addition : $[-2, 2]$: pas toujours représentable

Calcul de l'addition

- Image de l'addition : $[-2, 2]$: pas toujours représentable
- Calcul de $\dfrac{x + y + r}{\beta}, r \in [-\beta + 2, \beta - 2]$

Calcul de l'addition

- Image de l'addition : $[-2, 2]$: pas toujours représentable
- Calcul de $\dfrac{x+y+r}{\beta}, r \in [-\beta+2, \beta-2]$
- On calcule le premier chiffre de x et de y

$$\frac{\frac{x_1+x'}{\beta} + \frac{y_1+y'}{\beta} + r}{\beta} = \frac{\frac{x_1+y_1}{\beta} + r + \frac{x'+y'}{\beta}}{\beta}$$

Calcul de l'addition

- Image de l'addition : $[-2, 2]$: pas toujours représentable
- Calcul de $\dfrac{x + y + r}{\beta}, r \in [-\beta + 2, \beta - 2]$
- On calcule le premier chiffre de x et de y

$$\frac{\frac{x_1+x'}{\beta} + \frac{y_1+y'}{\beta} + r}{\beta} = \frac{\frac{x_1+y_1}{\beta} + r + \frac{x'+y'}{\beta}}{\beta}$$

- On calcule $q \in \{-1, 0, 1\}, r' \in \{-\beta + 2, \dots, \beta + 2\}$

$$x1 + x2 = q \times \beta + r'$$

Calcul de l'addition

- Image de l'addition : $[-2, 2]$: pas toujours représentable
- Calcul de $\frac{x + y + r}{\beta}, r \in [-\beta + 2, \beta - 2]$
- On calcule le premier chiffre de x et de y

$$\frac{\frac{x_1 + x'}{\beta} + \frac{y_1 + y'}{\beta} + r}{\beta} = \frac{\frac{x_1 + y_1}{\beta} + r + \frac{x' + y'}{\beta}}{\beta}$$

- On calcule $q \in \{-1, 0, 1\}, r' \in \{-\beta + 2, \ldots, \beta + 2\}$

$$x1 + x2 = q \times \beta + r'$$

- On peut retourner $(q + r) :: \frac{x' + y' + r'}{\beta}$

Calcul de séries entières convergentes

- Idée : séparer la série en une partie représentative et une partie négligeable

$$\sum_{i=0}^{\infty} a_i = \sum_{i=0}^{n} a_i + \sum_{i=n+1}^{\infty} a_i, \qquad |\sum_{i=n+1}^{\infty} a_i| \leq \frac{\beta - 2}{2\beta^2}$$

Calcul de séries entières convergentes

- Idée : séparer la série en une partie représentative et une partie négligeable

$$\sum_{i=0}^{\infty} a_i = \sum_{i=0}^{n} a_i + \sum_{i=n+1}^{\infty} a_i, \qquad |\sum_{i=n+1}^{\infty} a_i| \leq \frac{\beta - 2}{2\beta^2}$$

- Si on calcule les deux premiers chiffres de $\sum_{i=0}^{n} a_i$ alors on a un encadrement de taille $\frac{1}{\beta}$ du total

Calcul de séries entières convergentes

- Idée : séparer la série en une partie représentative et une partie négligeable

$$\sum_{i=0}^{\infty} a_i = \sum_{i=0}^{n} a_i + \sum_{i=n+1}^{\infty} a_i, \qquad |\sum_{i=n+1}^{\infty} a_i| \leq \frac{\beta - 2}{2\beta^2}$$

- Si on calcule les deux premiers chiffres de $\sum_{i=0}^{n} a_i$ alors on a un encadrement de taille $\frac{1}{\beta}$ du total
- On peut alors produire le premier chiffre indépendamment de la série par la fonction `make_digit`

Exemple de séries calculées

- Multiplication : $x \times y = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{x_i \times y}{\beta^i}$
- Constante d'Euler : $e - 2 = \sum_{i=2}^{\infty} \frac{1}{i!}$
- $\frac{\pi}{4} = \arctan \frac{1}{2} + \arctan \frac{1}{3}, \quad \arctan \frac{1}{n} = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i \frac{1}{n^{2i+1}}}{2i+1}$

Co-induction en Coq

- Définition de type d'objets infinis

```
CoInductive stream (A: Set) :=
  Cons :  A → stream A → stream A.
```

Co-induction en Coq

- Définition de type d'objets infinis

```
CoInductive stream (A: Set) :=
  Cons :  A → stream A → stream A.
```

- Fonctions co-récursives pour construire les objets infinis
  - Condition de garde pour empêcher les boucles infinies

```
CoFixpoint zero : stream ℤ := Cons 0 zero.
```

Co-induction en Coq

- Définition de type d'objets infinis

```
CoInductive stream (A: Set) :=
  Cons :  A → stream A → stream A.
```

- Fonctions co-récursives pour construire les objets infinis
  - Condition de garde pour empêcher les boucles infinies

```
CoFixpoint zero : stream ℤ := Cons 0 zero.
```

- Prédicats co-inductifs pour décrire des propriétés infinies

```
CoInductive stream_digit_pos : Stream Z → Prop
  I : ∀ d s, 0 ≤ d → stream_digit_pos s →
    stream_digit_pos (Cons d s).
```

- Preuves infinies : preuves par co-induction
- Tactique `cofix`

Certification des calculs

- Comment certifier que l'on décrit bien du calcul sur les réels ?

Certification des calculs

- Comment certifier que l'on décrit bien du calcul sur les réels ?
  - Montrer que les opérations satisfont certaines propriétés

Certification des calculs

- Comment certifier que l'on décrit bien du calcul sur les réels ?
  - Montrer que les opérations satisfont certaines propriétés
  - Relier notre représentation à une définition existante

Certification des calculs

- Comment certifier que l'on décrit bien du calcul sur les réels ?
  - Montrer que les opérations satisfont certaines propriétés
  - Relier notre représentation à une définition existante
- On va se servir de la définition axiomatique des réels de Coq

Certification des calculs

- Comment certifier que l'on décrit bien du calcul sur les réels ?
  - Montrer que les opérations satisfont certaines propriétés
  - Relier notre représentation à une définition existante
- On va se servir de la définition axiomatique des réels de Coq
  - Si la séquence infinie s représente le réel r de $[-1, 1]$
  - Et si k est un chiffre de β
  - Alors la séquence $k :: s$ constituée du chiffre k suivi de la séquence s représente $\frac{k+r}{\beta}$

Certification des calculs

- Comment certifier que l'on décrit bien du calcul sur les réels ?
  - Montrer que les opérations satisfont certaines propriétés
  - Relier notre représentation à une définition existante
- On va se servir de la définition axiomatique des réels de Coq
  - Si la séquence infinie s représente le réel r de $[-1, 1]$
  - Et si k est un chiffre de β
  - Alors la séquence $k :: s$ constituée du chiffre k suivi de la séquence s représente $\frac{k+r}{\beta}$

```
CoInductive represents (b : ℤ): stream ℤ → ℝ → Prop :=
  | rep : ∀ (s : stream ℤ) (r : ℝ) (k : ℤ),
    represents b s r →
    -1 ≤ r ≤ 1 →
    -b < k < b →
    represents b (k::s) (k + r)/b.
```

Preuve de correction

- Mettre en relation le résultat d'un algorithme F avec celui de la fonction mathématique calculée f

$$\boxed{\begin{array}{ccc} s_1,\ldots,s_n & \longrightarrow & F(s_1,\ldots,s_n) \\ \downarrow & & \downarrow \\ r_1,\ldots,r_n & \longrightarrow & f(r_1,,\ldots,r_n) \end{array}}$$

- Exemple de l' addition

```
Theorem add_str_correct :
  ∀ (b r : ℤ) (x y: stream ℤ) (u v : ℝ),
    represents b x u →
    represents b y v→
    −b + 2 ≤ r ≤ b − 2  →
      represents b (add_str b x y r) (u + v + r)/b.
```

Complexité des preuves

- Restriction de la co-induction
  - Possibilité d'automatisation
- Fonctions mutuellement récursives pour les séries
  - Fonction `make_digit`
- Formalisation de la base $\Rightarrow$ nombreuses inégalités non linéaires
- Arithmétique modulaire ...

Résultats (Théorie)

- Calcul d'une fonction f avec une précision $\frac{1}{n}$

$$\frac{\lceil \log n \rceil \times T(f)}{\log \beta}$$

- $\frac{\lceil \log n \rceil}{\log \beta}$ chiffres à calculer pour une précision $\frac{1}{n}$
- $T(f)$: temps de calcul d'un chiffre pour une fonction f

Résultats

- Calcul de $\frac{1}{3} + \frac{1}{7}$

Base utilisée	LCR	2^2	2^8	2^{16}	2^{32}
Nombre de chiffres calculés	6400	3200	800	400	200
Temps de calcul (s)	31	6.184	0.440	0.284	0.308

Résultats

- Calcul de $\frac{1}{3} + \frac{1}{7}$

Base utilisée	LCR	2^2	2^8	2^{16}	2^{32}
Nombre de chiffres calculés	6400	3200	800	400	200
Temps de calcul (s)	31	6.184	0.440	0.284	0.308

- Calcul de $\frac{1}{3} \times \frac{1}{7}$

Base utilisée	LCR	2^2	2^8	2^{16}	2^{32}
Nombre de chiffres calculés	6400	3200	800	400	200
Temps de calcul (s)	0.028	16.96	1.412	1.224	1.768

Résultats

- Calcul de $\frac{1}{3} + \frac{1}{7}$

Base utilisée	LCR	2^2	2^8	2^{16}	2^{32}
Nombre de chiffres calculés	6400	3200	800	400	200
Temps de calcul (s)	31	6.184	0.440	0.284	0.308

- Calcul de $\frac{1}{3} \times \frac{1}{7}$

Base utilisée	LCR	2^2	2^8	2^{16}	2^{32}
Nombre de chiffres calculés	6400	3200	800	400	200
Temps de calcul (s)	0.028	16.96	1.412	1.224	1.768

- Calcul de $e - 2$

Base utilisée	LCR	10	32	64	100	2^{10}
Nombre de chiffres calculés	300	90	60	50	45	30
Temps de calcul (s)	2.3	19.88	13.60	1.516	3.420	604

Perspectives

- Amélioration de la multiplication
- Généralisation du type des chiffres et des nombres utilisés pour les calculs intermédiaires
- Calcul des séries formelles
- Calcul de l'inverse : $\frac{1}{x} = \frac{1}{1-(1-x)} = \sum_{i=0}^{\infty}(1-x)^i$
- Calcul de fonctions analytiques