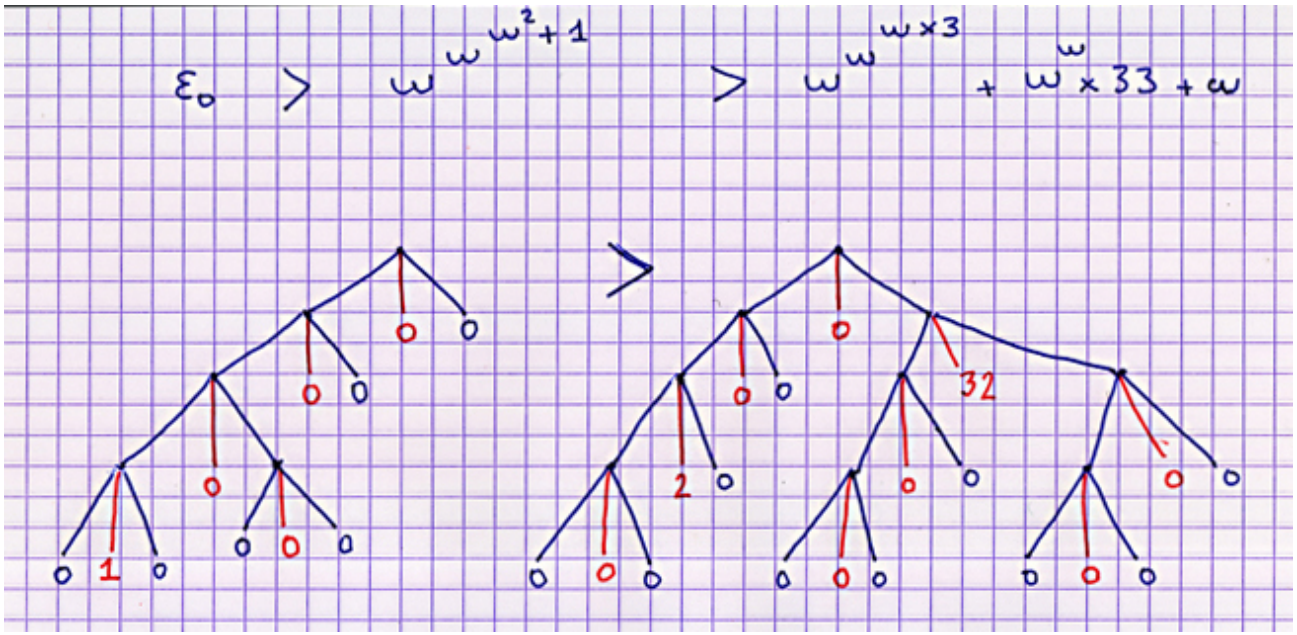
# Opérateurs de description en *Coq*

Pierre Castéran[1]

[1]Méthodes Formelles, LaBRI

# Le contexte : Travail sur les preuves de terminaison et les ordinaux

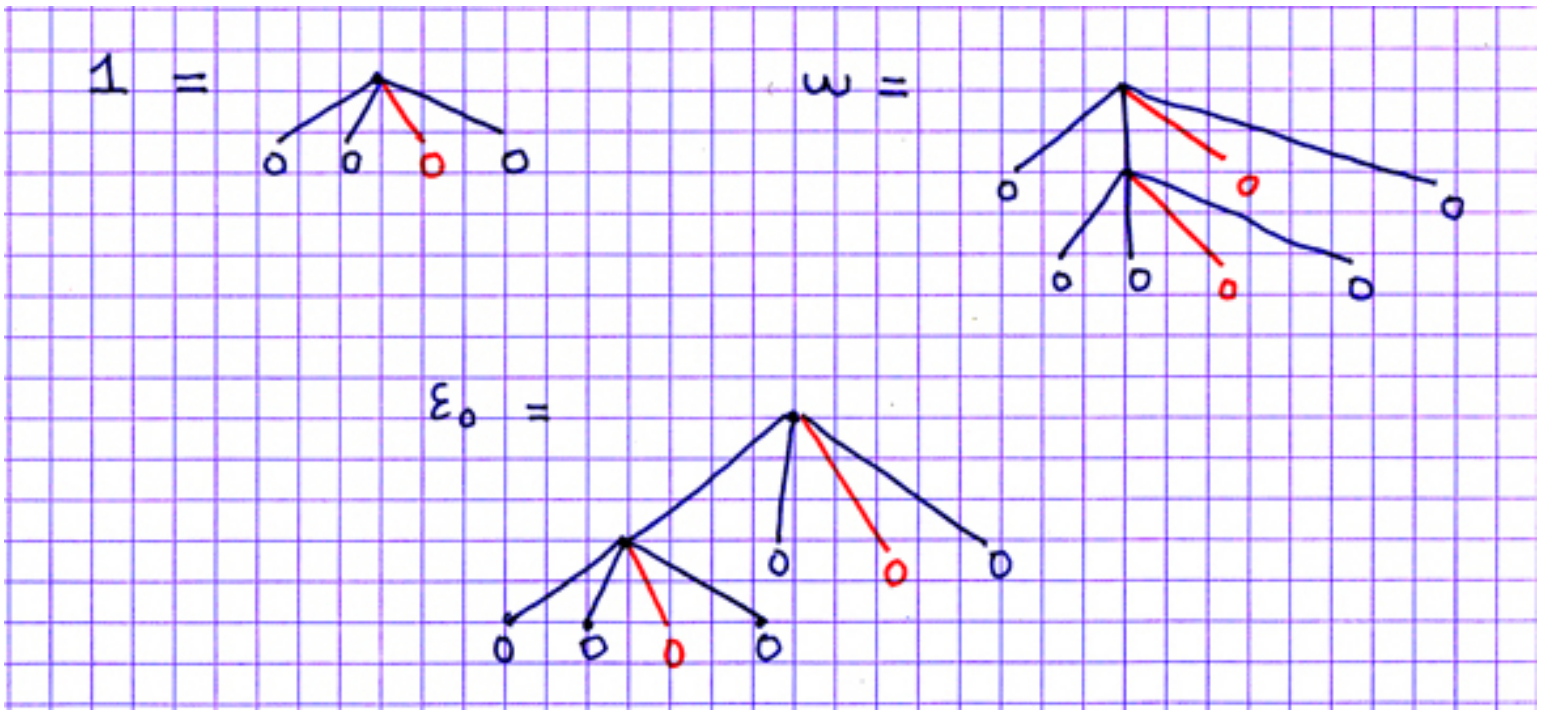
- Preuve de terminaison des suites de Goodstein et des batailles d'Hydre, utilisant des ordinaux en forme normale de Cantor :



- On définit un ordre total, décidable, bien fondé (preuve par plongement dans le rpo),
- une arithmétique (successeur, addition, multiplication, exponentiation),
- on associe à toute hydre ou toute suite de Goodstein un ordinal,
- on prouve que la suite des ordinaux associés est strictement décroissante.

# Extension de ce travail

On peut représenter des ordinaux plus grands à l'aide de *la forme normale de Veblen* :



# Quelques difficultés

- Représentation compacte, mais peu intuitive

```
Inductive T2: Set :=
  | zero : T2
  | cons : T2 → T2 → nat → T2.
```

cons a b n c == $\psi(a, b) \times (n + 1) + c$

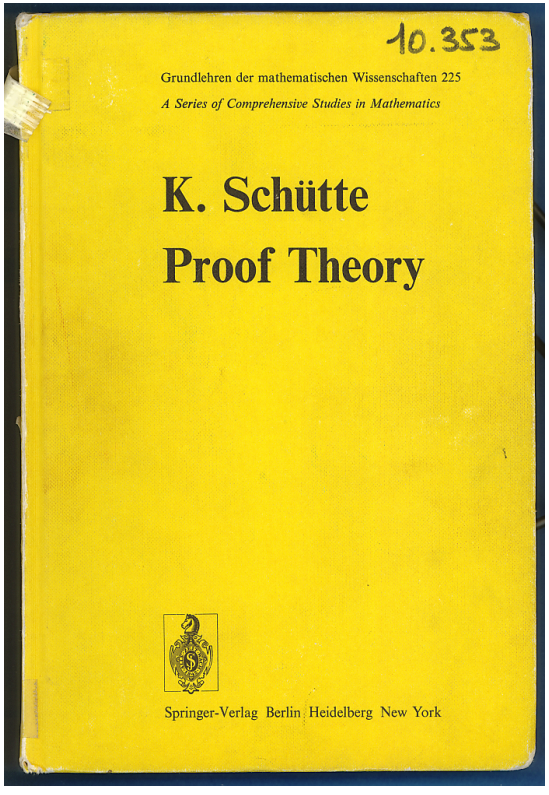
- la relation d'ordre total associée est définie de façon inductive par 7 cas, genre :

```
lt_4 : ∀ α1 α2 β1 β2 n1 n2 γ1 γ2,
       α2 < α1 →
       cons α1 β1 0 zero < β2 →
       cons α1 β1 n1 γ1 <  cons α2 β2 n2 γ2
```

# L'exemple de l'addition

```
Fixpoint plus (alpha beta : T2) {struct alpha}:T2 :=
 match alpha,beta with
 |  zero, y  => y
 |  x, zero => x
 |  cons a b n c, cons a' b' n' c' =>
     (match compare (cons a b 0 zero)
                    (cons a' b' 0 zero)
      with | Lt => cons a' b' n' c'
           | Gt => (cons a b n  (c + (cons a' b' n' c')))
           | Eq  => (cons a b (S(n+n')) c')
      end)
 end
where "alpha + beta" := (plus alpha beta): g0_scope.
```

Afin de valider une telle représentation, il est nécessaire de prendre une référence mathématique :



# Une Définition axiomatique des ordinaux dénombrables

**Ax. I.** $\mathbb{O}$ *is a set well-ordered by a relation* $<$.

**Ax. II.** *Every bounded subset of* $\mathbb{O}$ *is denumerable.* That is: if, given $M \subset \mathbb{O}$ there exists $\alpha \in \mathbb{O}$ such that $\xi < \alpha$ for all $\xi \in M$, then $M$ is a finite or denumerably infinite set.

**Ax. III.** *Every denumerable subset of* $\mathbb{O}$ *is bounded.* That is: for each finite or denumerably infinite set $M \subset \mathbb{O}$ there exists $\alpha \in \mathbb{O}$ such that $\xi < \alpha$ for all $\xi \in M$.

**Corollary:** $\mathbb{O}$ is an infinite, but not denumerable set.

# Validation de la représentation des ordinaux

- Etablir un morphisme injectif des représentations en forme normale de Cantor ou Veblen (ou autres) vers l'ensemble des ordinaux dénombrables (par exemple selon Schütte)
- Première étape, traduire en *Coq* cette théorie axiomatique.
- L'analyse du discours de Schütte fait apparaître deux notions récurrentes :
  - fonctions partielles,
  - définitions de constantes à partir de preuves [classiques] d'existence.

# Représentation de fonctions partielles en *Coq* : un exemple

$$\frac{Y \text{ dénombrable} \quad X \subseteq Y}{\bigsqcup X \leq \bigsqcup Y}$$

*Les axiomes de Schütte permettent de définir la borne supérieure d'une partie dénombrable de* $\mathbb{O}$.

# Représentation de fonctions partielles en *Coq* : un exemple

$$\frac{Y \text{ dénombrable} \quad X \subseteq Y}{\bigsqcup X \leq \bigsqcup Y}$$

```
⨆ : Ensemble OT → option OT
```

```
∀ X Y, denumerable Y → Included X Y  →
 match ⨆ X, ⨆ Y with
 | Some x, Some y => x ≤ y
 |      _,      _ => True
 end
```

# Représentation de fonctions partielles en *Coq* : un exemple

$$\frac{Y \text{ dénombrable} \quad X \subseteq Y}{\bigsqcup X \leq \bigsqcup Y}$$

```
⨆ : ∀ X, denumerable X → OT
```

```
∀ X Y (D : denumerable Y)(H: Included X Y),
 ⨆ X (denumerable_included X Y D H) ≤ ⨆ Y D
```

# Représentation de fonctions partielles en *Coq* : un exemple

$$\frac{Y \text{ dénombrable} \quad X \subseteq Y}{\bigsqcup X \leq \bigsqcup Y}$$

```
is_⨆ : Ensemble OT → OT → Prop
```

```
∀ X Y x y, denumerable Y → Included X Y →
           is_⨆ X x → is_⨆ Y y →
           x ≤ y
```

# Représentation de fonctions partielles en *Coq* : un exemple

$$\frac{Y \text{ dénombrable} \quad X \subseteq Y}{\bigsqcup X \leq \bigsqcup Y}$$

```
Require Import Epsilon.

⨆ : Ensemble OT → OT

∀ X Y, denumerable Y → Included X Y →
       ⨆ X ≤ ⨆ Y.
```

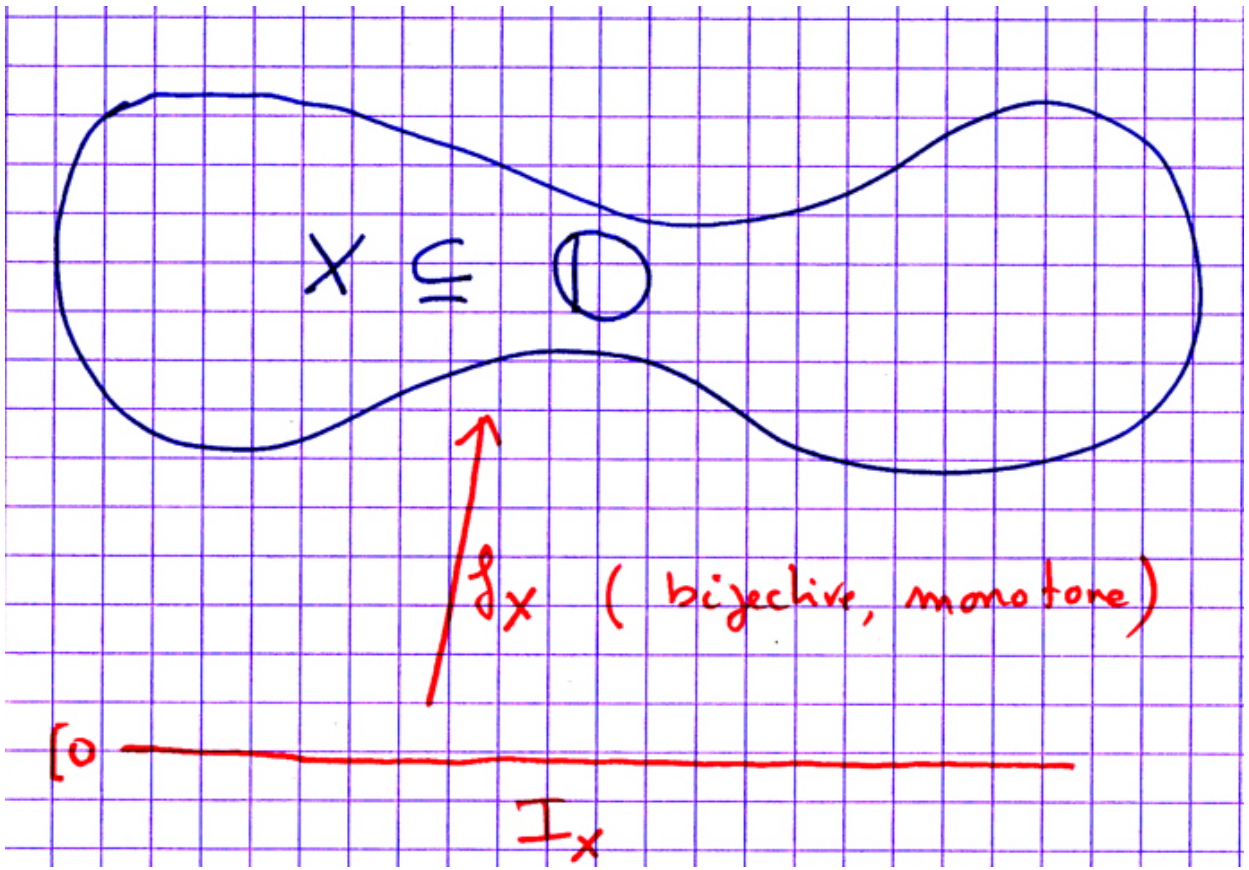
# Définitions globales à partir de preuves d'existence

Considérons la définition de l'addition dans $\mathbb{O}$ :

*« $\alpha + \beta$ est le $\beta$-ième ordinal supérieur ou égal à $\alpha$ »*

- Cette définition est une application d'une fonction d'énumération de l'ensemble des éléments de $\mathbb{O}$ supérieurs ou égaux à $\alpha$,
- En général, la locution « le $\beta$-ième élément de $X$ » n'est pas partout définie.

# Fonctions d'énumération



Le texte ci-dessous construit une fonction $g$ point par point. Ce lemme est utilisé par la suite dans une construction (par induction transfinie) d'une fonction d'énumération de tout sous-ensemble de $\mathbb{O}$.

**Lemma 3.** *If every proper segment of a set $B \subset \mathbb{O}$ has an ordering function then $B$ also has an ordering function.*

*Proof.* Let $f_\beta : A_\beta \to B(\beta)$ be an ordering function of $B(\beta)$ for each proper segment $B(\beta)$ of $B$. By Ax. II the set $B(\beta)$ is denumerable. Since $f_\beta$ is bijective, $A_\beta$ is also denumerable and therefore a proper $\mathbb{O}$-segment. Therefore to each ordinal $\beta \in B$ there is an ordinal $g(\beta)$ such that $A_\beta = \mathbb{O}(g(\beta))$. $g$ is a map from $B$ into $\mathbb{O}$.

# L'opérateur de description indéfinie et ses dérivés

Logic.ClassicalEpsilon (requires Classical)

```
Axiom constructive_indefinite_description :
  forall (A : Type) (P : A→Prop),
  (exists x, P x) → { x : A | P x }.

epsilon : ∀ A: Type, inhabited A → (A → Prop) → A.

epsilon_spec
      : ∀ (A : Type) (i : inhabited A) (P : A → Prop),
        (∃ x : A, P x) → P (epsilon i P)
```

# Opérateurs dérivés

hilbert/Epsilon.v

```
Definition iota  (A:Type)(i : inhabited A)
                 (P: A→Prop) : A :=
 epsilon i (unique P).

Definition the_fun (i : inhabited B)(D : A→Prop)
       (R:A→B→Prop)
       (pi : ∀ a, D a → ∃! b, R a b)
       : A→B :=
 fun a:A⇒ iota  i (fun (b:B)⇒ D a ∧ R a b).
```

# Un exemple : la définition de l'addition

```
Definition alpha_th (B: Ensemble OT):=
   epsilon
     (inhabits (fun alpha => alpha))
     (fun f =>
         ordering_function f (the_ordering_segment B) B).

Lemma alpha_th_ok
      : ∀ B : Ensemble OT,
        Included B ordinal ->
        ordering_function (alpha_th B)
                          (the_ordering_segment B) B
```

# Définition de l'addition (suite)

```
Definition plus alpha : OT → OT :=
           alpha_th (ge alpha).

Notation "alpha + beta " := (plus alpha beta) : ord_scope.
```

# Tactiques associées

```
 /*Une fonction f  normale sur X
est une fonction d'énumération continue de ℕ dans X*/

Lemma normal_plus_alpha : ∀  α, ordinal α →
                                 normal (plus α) (ge α).
Proof.
 intros; unfold plus; epsilon_e (alpha_th (ge α)).
.
```

```
alpha : Well_Orders.M ON
H : ordinal alpha
============================
∃ x : OT → OT,
  ordering_function x (the_ordering_segment (ge alpha))
                      (ge alpha)

subgoal 2 is:
∀ x : OT → OT,
 ordering_function x (the_ordering_segment (ge alpha))
                     (ge alpha) →
 normal x (ge alpha)
```

Suite de la preuve, utilisant le théorème suivant :

> *« Si $X \subseteq \mathbb{O}$ est non borné et clos par $\bigsqcup$, alors toute fonction d'énumération de $X$ est normale. »*

# Respect de la structure du discours mathématique

denumerable and therefore a proper $\mathbb{O}$-segment. Therefore to each ordinal $\beta \in B$ there is an ordinal $g(\beta)$ such that $A_\beta = \mathbb{O}(g(\beta))$. $g$ is a map from $B$ into $\mathbb{O}$.

```
Section beta_fixed.
 Variable beta : OT.
 Hypothesis beta_B : In B beta.
 ...
 Definition g := iota inh_OT
                  (fun o ⇒ ordinal o ∧
                            A_beta = members o).
End beta_fixed.

Lemma g_def : ∀  β:OT, In B β →
                 A_beta β = members (g β).
```

# Bilan provisoire

- L'opérateur de description indéfinie permet de décrire facilement les fonctions partielles, et des constructions classiques du discours mathématique
- Les énoncés de théorèmes ne demandent pas d'adaptation,
- La traduction de certaines définitions peut donner lieu à des expressions complexes (opérateurs de description emboîtés, points-fixes de fonctions mutuellement récursives), mais il suffit d'en dériver les égalités paraphrasant ces définitions.

Non incompatibilité avec le *Coq* usuel, moyennant quelques précautions :

- incompatibilité avec l'imprédicativité de `Set`,
- transformation de $P \vee Q$ en $\{P\} + \{Q\}$ (en utilisant *epsilon*),
- transformation de $P \vee \neg P$ en $\{P\} + \{\neg P\}$ (en utilisant seulement *iota*)
- Utilisation du système de modules : Le module *EPSILON0* est en « *Coq* pur ». Le lemme ci-dessous établit la relation entre une représentation effective de l'ordinal $\omega$, et sa définition mathématique classique.

```
Lemma omega_omega : inject EPSILON0.omega = omega.
```

# À faire :

- Considérer d'autres corpus,
- Structures syntaxiques adaptées (cf le travail de Pierre Corbineau)
- Développer plus de tactiques spécialisées.