HOL4-Beagle, de l’ordre supérieur vers le premier ordre

Thibault Gauthier

8 janvier 2014

Deux types de prouveurs

	HOL4	Beagle
Type	Interactif	Automatique
Expressivité	Ordre supérieur	Premier ordre
Sûreté	Petit noyau	Code assez long

Énoncé du problème

Problème Voilà deux prouveurs internes à HOL4.

- Metis : premier ordre + traduction de l'ordre supérieur vers le premier ordre
- Cooper : arithmétique

Énoncé du problème

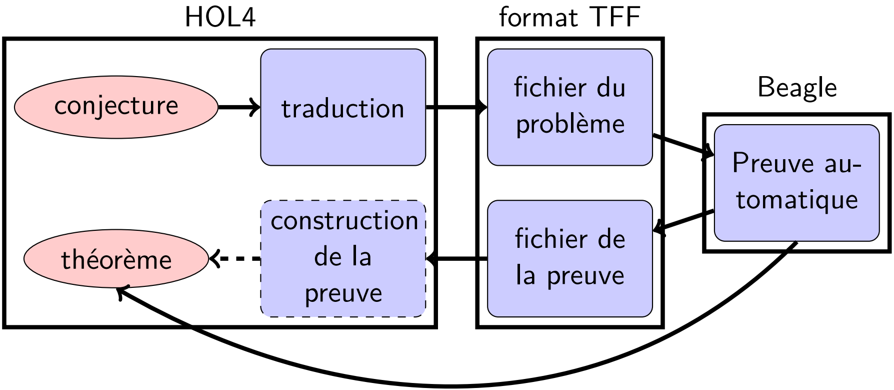
Problème Voilà deux prouveurs internes à HOL4.

- Metis : premier ordre + traduction de l'ordre supérieur vers le premier ordre
- Cooper : arithmétique

Solution Un prouveur externe.

- Beagle : premier ordre et arithmétique

Schéma d'interaction



Ordre de la traduction vers le premier ordre

1. Monomorphisation
2. Négation de la conclusion
3. Mise en forme normale conjonctive
4. λ-lifting
5. Élimination des booléens
6. Mise sous forme d'un ensemble de clauses
7. Défonctionnalisation

Monomorphisation

Instanciation des types polymorphes (a,...) par des types monomorphes (int,$bool$,...).

Problème

Thm 1 : $\forall x : a.\ D\ x\ 0$ Thm 2 : $C = \lambda x : a.\ D\ x\ 0$

Conjecture : $C\ 2$

Monomorphisation

Instanciation des types polymorphes (a,...) par des types monomorphes (int,$bool$,...).

Problème

Thm 1 : $\forall x : a.\ D\ x\ 0$ Thm 2 : $C = \lambda x : a.\ D\ x\ 0$
Conjecture : $C\ 2$

Unification de $C : a \rightarrow int \rightarrow bool$ et de $C : int \rightarrow int \rightarrow bool$

Thm 1 : $\forall x : a.\ D\ x\ 0$ Thm 2 : $C = \lambda x : int.\ D\ x\ 0$
Conjecture : $C\ 2$

Monomorphisation

Instanciation des types polymorphes (a,...) par des types monomorphes (int,$bool$,...).

Problème

Thm 1 : $\forall x : a.\ D\ x\ 0$ Thm 2 : $C = \lambda x : a.\ D\ x\ 0$
Conjecture : $C\ 2$

Unification de $C : a \rightarrow int \rightarrow bool$ et de $C : int \rightarrow int \rightarrow bool$

Thm 1 : $\forall x : a.\ D\ x\ 0$ Thm 2 : $C = \lambda x : int.\ D\ x\ 0$
Conjecture : $C\ 2$

Unification de $D : a \rightarrow int \rightarrow bool$ et de $D : int \rightarrow int \rightarrow bool$

Thm 1 : $\forall x : int.\ D\ x\ 0$ Thm 2 : $C = \lambda x : int.\ D\ x\ 0$
Conjecture : $C\ 2$

λ-lifting

Problème

Thm 1 : $\forall x.\ D\ x\ 0$ Thm 2 : $C = \lambda x.\ D\ x\ 0$

Conjecture : $C\ 2$

Négation de la conclusion

$$\{\forall x.\ D\ x\ 0\ ,\ C = \lambda x.\ D\ x\ 0\ ,\ \neg(C\ 2)\}$$

λ-lifting

Problème

Thm 1 : $\forall x.\ D\ x\ 0$ Thm 2 : $C = \lambda x.\ D\ x\ 0$
Conjecture : $C\ 2$

Négation de la conclusion

$$\{\forall x.\ D\ x\ 0\ ,\ \ C = \lambda x.\ D\ x\ 0\ ,\ \ \neg(C\ 2)\}$$

λ-lifting :

$$C = \lambda x.\ D\ x\ 0\ \rightarrowtail\ \exists f.\ (\forall x.\ f\ x = D\ x\ 0) \wedge C = f$$

Mise sous forme d'un ensemble de clauses

$$\{\forall x.\ D\ x\ 0\ ,\ \forall x.\ f\ x = D\ x\ 0\ ,\ \ C = f\ ,\ \neg(C\ 2)\}$$

Défonctionnalisation

Soit App vérifiant $f\ x = App\ f\ x$. On effectue une défonctionnalisation lorsqu'une fonction non-arithmétique :

- est quantifiée universellement
  $\forall h.\ h\ x\ y \ \rightarrowtail \forall h.\ App\ (App\ h\ x)\ y$
- a le même type qu'une fonction quantifiée universellement
- a un nombre d'arguments, auxquelles la fonction est appliquée, qui varie
  $\{h\ x\ y\ z\ ,\ h\ x = j\} \ \rightarrowtail\ \{App\ (App\ (h\ x)\ y)\ z\ ,\ h\ x = j\}$

Défonctionnalisation

Soit *App* vérifiant $f\ x = App\ f\ x$. On effectue une défonctionnalisation lorsqu'une fonction non-arithmétique :

- est quantifiée universellement
  $\forall h.\ h\ x\ y \ \rightarrowtail \forall h.\ App\ (App\ h\ x)\ y$
- a le même type qu'une fonction quantifiée universellement
- a un nombre d'arguments, auxquelles la fonction est appliquée, qui varie
  $\{h\ x\ y\ z\ ,\ \ h\ x = j\} \ \rightarrowtail \ \{App\ (App\ (h\ x)\ y)\ z\ ,\ \ h\ x = j\}$

Défonctionnalisation

$$\{\forall x.\ D\ x\ 0\ ,\ \forall x.\ f\ x = D\ x\ 0\ ,\ C = f\ ,\ \neg(C\ 2)\}$$

$$\{\forall x.\ D\ x\ 0\ ,\ \forall x.\ App\ f\ x = D\ x\ 0\ ,\ C = f\ ,\ \neg(C\ 2)\}$$

Qualités et limites de l'interaction HOL4-Beagle

Qualités :

- est correcte (préserve la satisfaisabilité)
- prouve 80% des conjectures prouvées par Metis auxquelles on a enlevé les lemmes arithmétiques
- utilise un format de communication répandu

Limites :

- est incomplète et (ne préserve pas l'insatisfaisabilité)
- ne cherche pas automatiquement des théorèmes aidant à prouver la conjecture
- ne rejoue pas (encore) la preuve