Analyse de dépendance et correction des réseaux de preuve

Marc Bagnol, Amina Doumane, Alexis Saurin

10 janvier 2014

Logique linéaire et MLL

Logique linéaire et MLL

$$\frac{}{\vdash A^{\perp}, A}\ (\mathrm{Ax}) \qquad \frac{\vdash \Gamma, A^{\perp} \qquad \vdash \Delta, A}{\vdash \Gamma, \Delta}\ (\mathrm{Cut})$$

$$\frac{\vdash \Gamma, A \qquad \vdash \Delta, B}{\vdash \Gamma, \Delta, A \wedge B}\ (\wedge) \qquad \frac{\vdash \Gamma, A, B}{\vdash \Gamma, A \vee B}\ (\vee)$$

Logique linéaire et MLL

$$\frac{}{\vdash A^\perp, A}\ (\mathrm{Ax}) \qquad \frac{\vdash \Gamma, A^\perp \qquad \vdash \Delta, A}{\vdash \Gamma, \Delta}\ (\mathrm{Cut})$$

$$\frac{\vdash \Gamma, A \qquad \vdash \Delta, B}{\vdash \Gamma, \Delta, A \otimes B}\ (\otimes) \qquad \frac{\vdash \Gamma, A, B}{\vdash \Gamma, A \parr B}\ (\parr)$$

MELL

MLL

MELL

MLL $+$ $!\,,\,?$

MELL

$$\text{MLL} \quad + \quad !\,,\,? \quad \supseteq \quad \lambda - \text{calcul (codages CBN et CBV)}$$

Réseaux de preuve

Une représentation plus canonique des preuves/programmes :

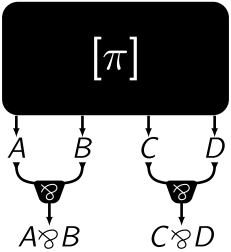
Réseaux de preuve

Une représentation plus canonique des preuves/programmes :

$$\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\ \pi \\ \vdash A, B, C, D\end{array}}{\vdash A \parr B, C, D}\ (\parr)}{\vdash A \parr B, C \parr D}\ (\parr) \qquad\qquad \dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\ \pi \\ \vdash A, B, C, D\end{array}}{\vdash A, B, C \parr D}\ (\parr)}{\vdash A \parr B, C \parr D}\ (\parr)$$

Réseaux de preuve

Une représentation plus canonique des preuves/programmes :



Réseaux de preuve

Vocabulaire : si $[\pi] = R$

Réseaux de preuve

Vocabulaire : si $[\pi] = R$

Le réseau R est la <u>traduction</u> de π.

Réseaux de preuve

Vocabulaire : si $[\pi] = R$

Le réseau R est la traduction de π.
π est une séquentialisation de R.

Réseaux de preuve

En λ-calcul, σ-equivalence :

Réseaux de preuve

En λ-calcul, σ-equivalence :

$$\big((\lambda x.U)V\big)W \;\simeq_\sigma\; (\lambda x.UW)V$$

$$(\lambda y \lambda x.U)W \;\simeq_\sigma\; \lambda x.\big((\lambda y.U)W\big)$$

(quand x n'est pas libre dans W)

Correction

Structures de preuves *vs.* réseaux de preuves.

Correction

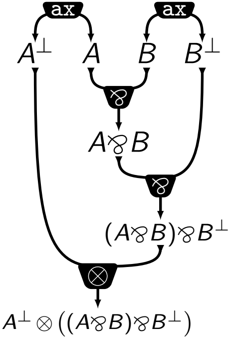
Structures de preuves *vs.* réseaux de preuves.

Problème de la correction :

Correction

Structures de preuves *vs.* réseaux de preuves.

Problème de la correction :
est-ce que cette structure de preuve est un réseau ?



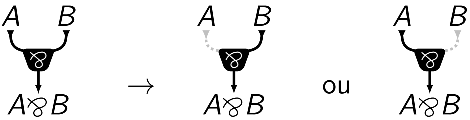
Critères de correction

Critères de correction

Critère de Danos-Regnier :

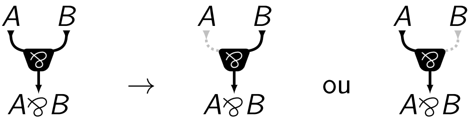
Critères de correction

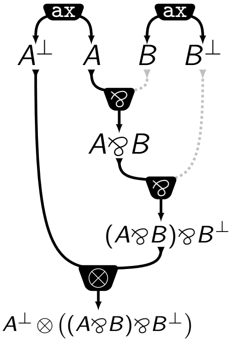
Critère de Danos-Regnier :



Critères de correction

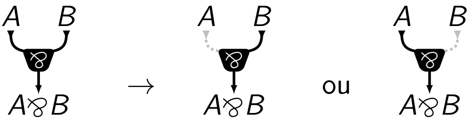
Critère de Danos-Regnier :

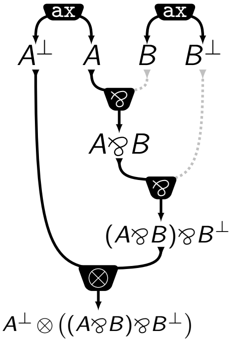




Critères de correction

Critère de Danos-Regnier :



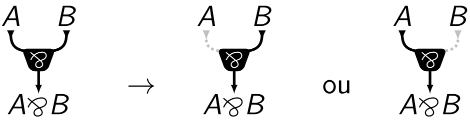


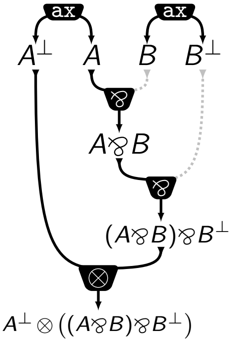
Théorème

Une structure est DR-correcte si et seulement si elle est un réseau.

Critères de correction

Critère de Danos-Regnier :





Théorème

Une structure est DR-correcte si et seulement si elle est un réseau.

Complexité temporelle exponentielle !

Critères de correction

D'autres critères, basés sur de la réécriture de graphes : contraction, parsing.

Critères de correction

D'autres critères, basés sur de la réécriture de graphes : contraction, parsing.

Implémentations :
quadratique (naïve), linéaire.

Dépendance

Complexité en espace ?

Dépendance

Complexité en espace ?

Article de V. Mogbil et P. Jacobé de Naurois : la correction des structures de preuve est un problème NLogspace-complet.

Dépendance

Complexité en espace ?

Article de V. Mogbil et P. Jacobé de Naurois : la correction des structures de preuve est un problème NLogspace-complet.

Graphe de dépendance : établir l'existence d'une réécriture du graphe, sans l'effectuer.

Dépendance

Variante du critère Mogbil-Naurois, graphe de dépendance $D(G)$:

- s-chemin : ne passe pas par les deux prémisse d'un lien $\parr$

Dépendance

Variante du critère Mogbil-Naurois, graphe de dépendance $D(G)$:

- s-chemin : ne passe pas par les deux prémisse d'un lien $\parr$
- nœuds de $D(G)$: $\parr$ de la structure ($+$ une source s)

Dépendance

Variante du critère Mogbil-Naurois, graphe de dépendance $D(G)$:

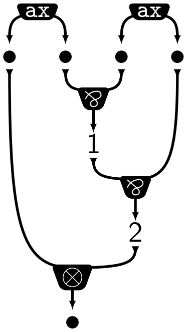
- s-chemin : ne passe pas par les deux prémisse d'un lien $\parr$
- nœuds de $D(G)$: $\parr$ de la structure (+ une source s)
- si il existe s-chemin élémentaire de A à B passe par $C \parr D$, l'arête $A \parr B \leftarrow C \parr D$ est présente dans $D(G)$

Dépendance

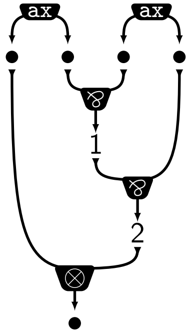
Variante du critère Mogbil-Naurois, graphe de dépendance $D(G)$:

- s-chemin : ne passe pas par les deux prémisse d'un lien $\parr$
- nœuds de $D(G)$: $\parr$ de la structure ($+$ une source s)
- si il existe s-chemin élémentaire de A à B passe par $C \parr D$, l'arête $A \parr B \leftarrow C \parr D$ est présente dans $D(G)$
- $+$ arêtes depuis la source

Dépendance



Dépendance



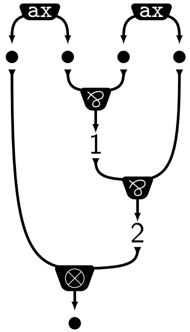
Graphe de dépendance :

1

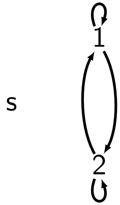
s

2

Dépendance



Graphe de dépendance :



Dépendance

Lien avec l'ordre d'introduction des connecteurs dans les séquentialisations du réseau :

Dépendance

Lien avec l'ordre d'introduction des connecteurs dans les séquentialisations du réseau :

Théorème

Si $R = [\pi]$ est un réseau et si on note $O(\pi)$ l'ordre d'introduction des connecteurs $\parr$ dans la preuve π, on a

$$D(R) \subseteq O(\pi)$$

Dépendance

Lien avec l'ordre d'introduction des connecteurs dans les séquentialisations du réseau :

Théorème

Si $R = [\pi]$ est un réseau et si on note $O(\pi)$ l'ordre d'introduction des connecteurs $\invamp$ dans la preuve π, on a

$$D(R) \subseteq O(\pi)$$

Condition nécessaire sur $D(R)$: acyclicité.

Dépendance

Citère de correction **DepGraph** : on dit que la structure R est **DepGraph**-correcte si

Dépendance

Citère de correction **DepGraph** : on dit que la structure R est **DepGraph**-correcte si

- $\#Ax - \#\otimes = 1$
- R est connexe

Dépendance

Citère de correction **DepGraph** : on dit que la structure R est **DepGraph**-correcte si

- $\#Ax - \#\otimes = 1$
- R est connexe
- $D(R)$ est acyclique, de source s

Dépendance

Citère de correction **DepGraph** : on dit que la structure R est **DepGraph**-correcte si

- $\#Ax - \#\otimes = 1$
- R est connexe
- $D(R)$ est acyclique, de source s

Théorème

*Une structure est **DepGraph**-correcte si et seulement si elle est un réseau.*

Dépendance

Questions ?