Théorie des types homotopiques

Guillaume Brunerie

Université de Nice Sophia Antipolis
Département de mathématiques

10 janvier 2014
JFLA 2014

Sommaire

Sommaire

Théorie des types homotopiques

Théorie des types homotopiques (actuellement)

HoTT = MLTT + univalence + types inductifs supérieurs

- MLTT = Théorie des types dépendants (Per Martin-Löf, années 1970)
- Axiome d'univalence (Vladimir Voevodsky, 2009)
- Types inductifs supérieurs (Mike Shulman, Peter Lumsdaine, etc. 2011)

Théorie des types homotopiques

Théorie des types homotopiques (actuellement)

HoTT = MLTT + univalence + types inductifs supérieurs

- Théorie des types dépendants avec des types identité « extensionnels »
- Nouveaux fondements des mathématiques plus intuitifs
- Langage pour la théorie de l'homotopie

Correspondance de Curry Howard

Correspondance types/énoncés, termes/démonstrations

$A \wedge B$	$A \times B$
$A \vee B$	$A + B$
$\forall x \in X, P(x)$	$\Pi_{x:X}, P(x)$
$\exists x \in X, P(x)$	$\Sigma_{x:X}, P(x)$

En théorie des types les énoncés sont des types, on peut quantifier sur les « démonstrations » d'un énoncé.

Égalité

On veut un type $\mathrm{Id}_A(x, y)$ correspondant à l'énoncé $x =_A y$.

$\rightarrow$ famille inductive de types engendrée par les $\mathrm{refl}_x : \mathrm{Id}_A(x, x)$ pour tout $x : A$ (Per Martin-Löf, années 1970/1980)

En particulier, dans le contexte vide, refl est la seule façon de montrer une égalité.

Problèmes :

- Pas d'extensionalité pour les fonctions, $\lambda n.(n + 0)$ et $\lambda n.(0 + n)$ ne sont pas égales
- Pas de vrais quotients, on doit travailler avec des setoïdes
- On peut itérer le type identité : $\mathrm{Id}_{\mathrm{Id}_{\mathrm{Id}_A(a,b)}(p,q)}(\alpha, \beta)$, mais c'est bizarre

Principe fondamental

Pour comprendre un type A, il faut comprendre ses éléments et ses types identité.

Principe fondamental

Pour comprendre un type A, il faut comprendre ses éléments et ses types identité.

Exemple

Soit A un type, P un prédicat sur A, $a : A$, $p, q : P(a)$.
Est-ce que $\mathrm{Id}_{\sum_{x:A} P(x)}((a,p),(a,q))$ est habité ?

Principe fondamental

Pour comprendre un type A, il faut comprendre ses éléments et ses types identité.

Exemple

Soit A un type, P un prédicat sur A, $a : A$, $p, q : P(a)$.
Est-ce que $\mathrm{Id}_{\Sigma_{x:A} P(x)}((a, p), (a, q))$ est habité ?
$\rightarrow$ Non, sauf si $P(a)$ est au plus un singleton.

Principe fondamental

Pour comprendre un type A, il faut comprendre ses éléments et ses types identité.

Exemple

Soit A un type, P un prédicat sur A, $a : A$, $p, q : P(a)$.
Est-ce que $\mathrm{Id}_{\Sigma_{x:A} P(x)}((a, p), (a, q))$ est habité ?
$\rightarrow$ Non, sauf si $P(a)$ est au plus un singleton.

Et quand P est de la forme $P(a) = \mathrm{Id}_B(f(a), g(a))$?

Principe fondamental

Pour comprendre un type A, il faut comprendre ses éléments et ses types identité.

Exemple

Soit A un type, P un prédicat sur A, $a : A$, $p, q : P(a)$.
Est-ce que $\mathrm{Id}_{\Sigma_{x:A} P(x)}((a,p),(a,q))$ est habité ?
$\rightarrow$ Non, sauf si $P(a)$ est au plus un singleton.

Et quand P est de la forme $P(a) = \mathrm{Id}_B(f(a), g(a))$?
$\rightarrow$ Non, sauf si tous les types identité de B sont au plus des singletons.

Niveaux homotopiques

Un type A est

- contractile (de niveau -2) si $\Sigma_{x:A}\Pi_{y:A}\mathrm{Id}_A(x,y)$
- une (h-)proposition (de niveau -1) si pour tous $x, y : A$, $\mathrm{Id}_A(x,y)$ est contractile
- un (h-)ensemble (de niveau 0) si pour tous $x, y : A$, $\mathrm{Id}_A(x,y)$ est une proposition

Lemmes (nécessitent l'extensionnalité des fonctions)

- Si A est contractile et $x, y : A$, alors $\mathrm{Id}_A(x,y)$ est contractile.
- Si pour tout $x, y : A$, $\mathrm{Id}_A(x,y)$ est habité, alors A est une proposition.

Sommaire

Univers

Un univers est un type U (ou Type) dont les éléments sont des types.

Quelles sont ses égalités ?

Équivalences

Une équivalence $e : A \simeq B$ contient, en gros :

- $e^{\rightarrow} : A \rightarrow B$
- $e^{\leftarrow} : B \rightarrow A$
- $e^{\varepsilon} : \Pi_{a:A}, \mathrm{Id}_A(e^{\leftarrow}(e^{\rightarrow}(a)), a)$
- $e^{\eta} : \Pi_{b:B}, \mathrm{Id}_B(e^{\rightarrow}(e^{\leftarrow}(b)), b)$

Une égalité entre deux équivalences $e, e' : A \simeq B$ est une égalité entre $e^{\rightarrow}$ et $e'^{\rightarrow}$.

Axiome d'univalence

Axiome d'univalence

Pour tous types A, B : Type, l'application canonique $\mathrm{Id}_{\mathrm{Type}}(A, B) \to (A \simeq B)$ est une équivalence

- Deux types équivalents sont égaux
- Contredit UIP : deux équivalences différentes donnent deux égalités différentes
- S'étend à tout type de structures, groupes, anneaux, catégories, propositions, ...

Sommaire

Types inductifs supérieurs

Un type inductif est un type I caractérisé par des constructeurs $c_k : \Gamma_k(I) \to I$.

- Condition de stricte positivité
- Tous les constructeurs renvoient un élément de I
- Une règle d'élimination est générée automatiquement

Types inductifs supérieurs

Un type inductif est un type I caractérisé par des constructeurs $c_k : \Gamma_k(I) \to I$.

- Condition de stricte positivité
- Tous les constructeurs renvoient un élément de I
- Une règle d'élimination est générée automatiquement

Un type inductif supérieur est un type inductif où la deuxième condition est relaxée :

- Tous les constructeurs renvoient un élément dans I, ou $\mathrm{Id}_I(u, v)$, ou $\mathrm{Id}_{\mathrm{Id}_I(u,v)}(p, q)$, etc.

Réflection propositionelle

Soit A un type. Soit $\|A\|$ le type inductif supérieur engendré par

- $[\_] : A \to \|A\|$
- prop : $\Pi_{u,v:\|A\|}, \mathrm{Id}_{\|A\|}(u, v)$

$\|A\|$ est une proposition, vraie ssi A est habité.

$\vdots$	$\vdots$
$A \vee B$	$\|A + B\|$
$\exists x \in X, P(x)$	$\|\Sigma_{x:X}, P(x)\|$

Quotients

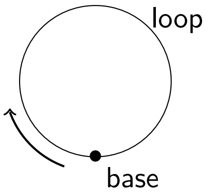
Soit X un ensemble et R une relation d'équivalence sur X. On définit X/R comme le type inductif supérieur engendré par :

- $[\_] : X \to X/R$
- $\sim\ : \Pi_{x,y:X}, \Pi_{p:R(x,y)}, \mathrm{Id}_{X/R}([x],[y])$
- $UIP_{X/R} : \Pi_{c,d:X/R}, \Pi_{p,q:\mathrm{Id}_{X/R}(c,d)}, \mathrm{Id}_{\mathrm{Id}_{X/R}(c,d)}(p,q)$

Autres exemples de types inductifs supérieurs

Le cercle $\mathbb{S}^1$, engendré par

- base : $\mathbb{S}^1$
- loop : $\mathrm{Id}_{\mathbb{S}^1}(\mathrm{base}, \mathrm{base})$



Théorème (Shulman, 2011)

Le type $\mathrm{Id}_{\mathbb{S}^1}(\mathrm{base}, \mathrm{base})$ est équivalent à $\mathbb{Z}$ (nécessite l'axiome d'univalence)

Sommaire

Modèles

Modèle simplicial (Voevodsky, 2009)

Dans ZFC + $(\omega + 1)$ cardinaux inaccessibles, on a un modèle (classique) où les types sont interprétés par des complexes de Kan.

Intuitivement, un type est un espace topologique à homotopie près, une preuve d'égalité est un chemin entre deux points.

Modèles des préfaisceaux simpliciaux (Shulman, 2012)

Extension du modèle simplicial où la logique n'est plus nécessairement classique.

Modèle cubique (Coquand, Huber, 2013/2014)

Dans une méta-théorie constructive, on a (?) un modèle où les types sont interprétés par des ensembles cubiques de Kan.

Conjecture de Voevodsky

Conjecture

Il existe un algorithme qui, étant donné un terme $u : \mathbb{N}$ dans MLTT + univalence, renvoie :

- Un terme $n : \mathbb{N}$ dans MLTT (sans univalence)
- Un terme $p : \mathrm{Id}_{\mathbb{N}}(u, n)$ dans MLTT + univalence

Le modèle dans les ensembles cubiques donne n mais pas p.

Conclusion

Points à retenir :

- Théorie des types dépendants où les types identité se comportent de façon contrôlée, compréhensible et intuitive
- Système permettant de formaliser les mathématiques et les mathématiques constructives plus facilement
- De forts liens avec la théorie de l'homotopie

Conclusion

Points à retenir :

- Théorie des types dépendants où les types identité se comportent de façon contrôlée, compréhensible et intuitive
- Système permettant de formaliser les mathématiques et les mathématiques constructives plus facilement
- De forts liens avec la théorie de l'homotopie

Pistes de recherche :

- Obtenir une vraie théorie des types (sans axiomes)

Conclusion

Points à retenir :

- Théorie des types dépendants où les types identité se comportent de façon contrôlée, compréhensible et intuitive
- Système permettant de formaliser les mathématiques et les mathématiques constructives plus facilement
- De forts liens avec la théorie de l'homotopie

Pistes de recherche :

- Obtenir une vraie théorie des types (sans axiomes)
- Comprendre les modèles

Conclusion

Points à retenir :

- Théorie des types dépendants où les types identité se comportent de façon contrôlée, compréhensible et intuitive
- Système permettant de formaliser les mathématiques et les mathématiques constructives plus facilement
- De forts liens avec la théorie de l'homotopie

Pistes de recherche :

- Obtenir une vraie théorie des types (sans axiomes)
- Comprendre les modèles
- Formaliser des résultats de maths/théorie de l'homotopie

Conclusion

Points à retenir :

- Théorie des types dépendants où les types identité se comportent de façon contrôlée, compréhensible et intuitive
- Système permettant de formaliser les mathématiques et les mathématiques constructives plus facilement
- De forts liens avec la théorie de l'homotopie

Pistes de recherche :

- Obtenir une vraie théorie des types (sans axiomes)
- Comprendre les modèles
- Formaliser des résultats de maths/théorie de l'homotopie
- Convaincre les mathématiciens

Référence

The Univalent Foundations Program
Homotopy Type Theory : Univalent Foundations of Mathematics
"*The HoTT book*"

Sommaire

- Foundations
- Mathematics
  - Homotopy theory
  - Category theory
  - Set theory
  - Real numbers